Concours Commun National 1997 - MAROC

MATHEMATIQUES I

Epreuve d'analyse durée : 4 heures

Option M-M'

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation.

Dans tout le problème on notera $(a_n)_{n\geq 1} = (a_n)$ la suite de terme général $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$.

Par convention, pour tout réel $x > 0$ on pose $x^0 = 1$.

I – Première partie

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente (on pourra par exemple étudier le terme $a_{n+1} - a_n$). On note γ la limite de la suite (a_n).
2. (a) En remarquant que pour n dans $\mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n} = \int_{[0,1]} (1-t)^{n-1} dt$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \int_{[0,1]} \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u} du - \int_{[1,n]} \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u} du.$$

(b) Montrer que les deux intégrales $\alpha = \int_{[0,1]} \frac{1-e^{-u}}{u} du$ et $\beta = \int_{[1,+\infty[} \frac{e^{-u}}{u} du$ existent.

(c) Prouver la convergence de la suite de terme général $\int_{[1,n]} \frac{\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u} du$ vers $\int_{[1,+\infty[} \frac{e^{-u}}{u} du$.

(d) Prouver de même la convergence de la suite de terme général $\int_{[0,1]} \frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u} du$ vers $\int_{[0,1]} \frac{1-e^{-u}}{u} du$.

Indication : pour $n \geq 2$ et $0 \leq u \leq 1$ on pourra établir l'inégalité $e^{-2u} \leq \left(1-\frac{u}{n}\right)^n$.

3. (a) Prouver l'égalité :

$$\gamma = \int_{[0,5]} \frac{1-e^{-u}}{u} du - \int_{[5,+\infty]} \frac{e^{-u}}{u} du - ln(5).$$

(b) Montrer que l'on a $\int_{[0,5]} \frac{1-e^{-u}}{u} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 5^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}$.

On admet l'égalité $\sum_{k=0}^{16} \frac{(-1)^k 5^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} = 2,18782$ à 10^{-5} près, et $\frac{5^{18}}{18 \times 18!} \leq 5 \times 10^{-5}$.

Justifier l'inégalité $\Big| \sum_{k=17}^{+\infty} \frac{(-1)^k 5^{k+1}}{(k+1)(k+1)!} \Big| \leq 10^{-4}$.

(c) Pour tout $x > 0$, montrer que l'on peut écrire :

$$\int_{[x,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\frac{e^{-x}}{x^3} + R(x)$$

avec $\mid R(x) \mid \leq 6\frac{e^{-x}}{x^4}$.

(d) En déduire une valeur approchée de γ à 2×10^{-4} près.

II – Seconde partie

On cherche un équivalent simple, puis un développement asymptotique de la somme $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} ln(n)x^n$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

1. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 2} ln(n)x^n$ possède un rayon de convergence égal à 1, et que $\sum_{n=2}^{+\infty} ln(n)x^n$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
2. Trouver le rayon de convergence, puis la somme, de la série entière :

$$\sum_{n\geq 1} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})x^n.$$

Indication : on pourra calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$.

3. En déduire que f est équivalente à $g : x \to \frac{ln(1-x)}{x-1}$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
4. En considérant la fonction $x \to (x-1)f(x)$, retrouver le résultat de la question précédente.
5. Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par le terme général $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n + \frac{1}{2})$.
   (a) Montrer que la suite (b_n) converge vers γ.
   (b) Pour tout $x > -\frac{1}{2}$, on pose $h(x) = ln(x + \frac{3}{2}) - ln(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{x+1}$. Prouver les inégalités suivantes :
   $$\forall x \in]\frac{1}{2}, +\infty[, \quad \frac{1}{12(x+\frac{3}{2})^3} \leq h(x) \leq \frac{1}{12(x+\frac{1}{2})^3}.$$
   (c) Montrer qu'il existe une constante k telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{k}{(n+\frac{3}{2})^2} \leq b_n - \gamma \leq \frac{k}{(n-\frac{1}{2})^2}.$$

6. Justifier l'existence de constantes k_1 et k_2 (que l'on explicitera) telles qu'au voisinage de $+\infty$ on ait :
$$a_n = \gamma + \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n^2} + O(\frac{1}{n^3}).$$

7. En déduire l'existence de trois constantes $k_1^{'}$, $k_2^{'}$ et $k_3^{'}$ telles que la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\sum_{n=2}^{+\infty} ln(n)x^n - \frac{ln(1-x)}{x-1} - \frac{k_1^{'}}{1-x} - k_2^{'}ln(1-x) - k_3^{'}(1-x)ln(1-x)$ soit prolongeable au point $x=1$ en une fonction dérivable en ce point.
Indication : on pourra remarquer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)} + O(\frac{1}{n^3})$.

III – Troisième partie

Dans cette partie, on cherche un équivalent simple de la somme $f_\alpha(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} ln^\alpha(n)x^n$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, α étant un réel quelconque.

1. Soit n_0 un élément de $\mathbb{N}$ et ϕ une application définie sur $[n_0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ continue, décroissante et telle que la série $\sum_{n\geq n_0} \phi(n)$ diverge.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=n_0}^{+\infty} \phi(k)x^k$, puis montrer que :
$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \phi(k)x^k \sim \int_{[n_0,+\infty[} \phi(t)x^t dt$$
quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

2. Pour $\alpha > 0$, discuter de la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(ln(n))^{\alpha-1}}{n}$.

3. Montrer que pour tout réel α on a :
$$f_\alpha(x) \sim \int_{[2,+\infty[} ln^\alpha(t)x^t dt$$
lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.
Indication : lorsque α est positif, on pourra s'inspirer de la question II - 4.

4. Dans cette question, α désigne un réel positif ou nul.
Pour $y \in]0, e^{-1}[$, on définit la fonction h_y par :
$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ h_y(u) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq u < 2y \\ \left(1 - \frac{ln(u)}{ln(y)}\right)^\alpha e^{-u} & si\ 2y \leq u. \end{cases}$$

   (a) Montrer que pour tout $y \in]0, e^{-1}[$ et tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $|h_y(u)| \leq \left(1 + |ln(u)|\right)^\alpha e^{-u}$.
   Indication : on pourra discuter selon que u est plus petit ou plus grand que 1.

   (b) Etablir l'équivalence :
   $$\int_{[2,+\infty[} ln^\alpha(t)e^{-yt}dt \sim \frac{|ln(y)|^\alpha}{y}$$
   lorsque y tend vers 0 par valeurs supérieures.

(c) Trouver un équivalent simple de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

5. Dans cette question α désigne un réel négatif et, pour $y \in]0, e^{-1}[$, h_y est la fonction définie à la question précédente.

(a) On veut montrer à nouveau l'équivalence :

$$\int_{[2,+\infty[} ln^\alpha(t)e^{-yt}dt \sim \frac{|ln(y)|^\alpha}{y}$$

lorsque y tend vers 0 par valeurs supérieures.

Indiquer pourquoi la méthode de la question précédente ne peut être utilisée sans modification.

(b) Pour $y \in]0, \frac{1}{4}[$, on définit la fonction g_y par :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+,\ g_y(u) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq u < \sqrt{y} \\ h_y(u) & si\ \sqrt{y} \leq u. \end{cases}$$

A l'aide de cette famille de fonctions, montrer l'équivalence annoncée à la question précédente.

(c) En déduire un équivalent simple de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.